COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES PETITES VALEURS DE |SIN(N)|

Guy PHILIPPE

26 août 2004

Résumé. La suite (|sin(n)|) est dense dans $[0,1]$ (Résultat bien connu) donc elle admet des valeurs arbitrairement petites. Pour avoir un « ordre de petitesse » on peut envisager de multiplier |sin(n)| par le terme général a_n d'une suite croissante qui annulerait voire inverserait cette petitesse. C'est ce qui a été réalisé ici avec $a_n = n^s$ en montrant que $\exists\, s > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} n^s|\sin(n)| = +\infty$ et cela grâce au théorème de Mahler[2] publié en 1953 et amélioré par M.Mignotte en 1974[1] et bien d'autres... M.Hata en 1993[3].
Ce résultat a des conséquences comme $ln(|sin(n)|) = O(ln(n))$ et
$\forall s > 0 \lim_{n\to+\infty} |sin(n)|^{\frac{1}{n^s}} = 1$; en particulier avec $s = 1 \quad \lim_{n\to+\infty} |sin(n)|^{\frac{1}{n}} = 1$
ainsi que les résultats analogues en remplaçant sin(n) par cos(n), tan(n) ou cotan(n) ce qui a aussi été prouvé ici. L'article se termine par quelques exercices d'application de tous ces résultats avec leurs corrigés.

Notations
les notations utilisées sont usuelles :
$ln(x)$ désigne le logarithme népérien du nombre réel $x > 0$.
O et o désignent les notations de Landau bien connues.
$E(x)$ veut dire partie entière du nombre réel x.
(a_n) désigne une suite de terme général a_n.

Rappels :

Théorème de Mahler[2] sur les approximations rationnelles de π.
Pour tout entier p et tout entier $q \geqslant 2$ *on a* $|\pi - \frac{p}{q}| \geqslant q^{-t}$ avec t=42 pour K.Mahler(1953), t=21 pour M.Mignotte(1974) et t=8,0161 pour M.Hata(1993).
Comme $|\pi - \frac{p}{q}| \geqslant q^{-t} \iff |q\pi - p| \geqslant q^{-t+1}$, dans la suite, on travaillera avec la deuxième formulation $|q\pi - p| \geqslant q^{-t+1}$ et, pour simplifier les écritures, avec l'énoncé de M.Mignotte où -t+1=-20 (t=21).

Théorème de Littlewood[5] qui généralise le théorème de Tauber.
Si S désigne la somme de la série entière réelle de terme général $a_n x^n$ et de rayon de convergence $R > 0$, si $\lim\limits_{x \to R^-} S(x) = l \in \mathbb{R}$ et $a_n = O(\frac{1}{n})$ alors la série converge pour $x = R$ et sa somme est l. Et idem pour $x \to (-R)^+$.

On rappelle aussi que pour tout entier $m > 0$ $\quad |sin(m)| \neq 0$ et $|sin(m)| \neq 1$ à cause de l'irrationnalité de π donc $\quad |sin(m)| \in]0 \quad 1[$ et idem pour $|cos(m)|$ ce qui assure l'existence de $tan(m)$ et $cotan(m)$ pour $m > 0$.

<u>Théorème 1</u>
Pour tout nombre réel $s > 20$ $\quad$ on a $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} n^s |sin(n)| = +\infty$

Preuve :
$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists! k_n \in \mathbb{N}) \quad k_n \pi \leqslant n < (k_n + 1)\pi \qquad$ où $k_n = E(\frac{n}{\pi})$

$\overbrace{|\text{————}+\text{——}|}^{\pi}$
$k_n\pi \quad n \quad (k_n+1)\pi$ $\qquad n - k_n\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$ <u>ou</u> $(k_n + 1)\pi - n \leqslant \frac{\pi}{2}$(c'est clair)

Or $\forall x \in [0 \quad \frac{\pi}{2}] \qquad sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi} x \Longrightarrow |sin(x)| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|$ d'où
$|sin(n - k_n\pi)| \geqslant \frac{2}{\pi}|n - k_n\pi|$ $\quad$ <u>ou</u> $\quad |sin((k_n + 1)\pi - n)| \geqslant \frac{2}{\pi}|(k_n + 1)\pi - n|$
soit $|sin(n)| \geqslant \frac{2}{\pi}|n - k_n\pi|$ $\quad$ <u>ou</u> $\quad |sin(n)| \geqslant \frac{2}{\pi}|(k_n + 1)\pi - n|$.
Dans la suite on suppose $n \geqslant 7$ ce qui assure que $k_n \geqslant 2$ et donc $k_n + 1 \geqslant 2$ d'où d'après le théorème de Mahler[2] avec t=21 on a :
$|n - k_n\pi| = |k_n\pi - n| \geqslant {k_n}^{-20} \geqslant (k_n + 1)^{-20}$ <u>et</u> $|(k_n + 1)\pi - n| \geqslant (k_n + 1)^{-20}$
Et par conséquent $\forall n \geqslant 7 \qquad |sin(n)| \geqslant \frac{2}{\pi}(k_n + 1)^{-20}$.
D'autre part $k_n\pi \leqslant n < (k_n + 1)\pi \Longrightarrow \frac{k_n}{k_n+1}\pi \leqslant \frac{n}{k_n+1} < \pi\,(\clubsuit)$ $\qquad$ et $k_n > \frac{n}{\pi} - 1$
Quand n tend vers $+\infty$ $\quad k_n(> \frac{n}{\pi} - 1)$ $\quad$ tend aussi vers $+\infty$ $\quad$ et donc $\frac{k_n}{k_n+1}\pi$ tend vers π puis compte tenu de $(\clubsuit)$ $\quad \frac{n}{k_n+1}$ $\quad$ tend vers π $\quad$ d'où à partir d'un certain rang R pour n $\quad$ on aura $\frac{n}{k_n+1} > 1$ et donc $(\frac{n}{k_n+1})^{20} > 1$. Par conséquent
$(\forall s > 20)\ (\forall n > R) \quad n^s|sin(n)| \geqslant \frac{2}{\pi} n^s (k_n + 1)^{-20} = \frac{2}{\pi} n^{s-20} (\frac{n}{k_n+1})^{20} \underline{> \frac{2}{\pi} n^{s-20}}$.
Et finalement quand n tend vers $+\infty$, comme $s - 20 > 0$, on a la propriété annoncée : $n^s|sin(n)|$ tend vers $+\infty$.
Posons $E = \{s \in \mathbb{R} / \lim\limits_{n \to +\infty} n^s|sin(n)| = +\infty\}$ alors d'après le théorème 1 on a $21 \in E$ donc $E \neq \emptyset$. De plus E est minoré par 0 car pour tout $s < 0$ on a $s \notin E$ vu que $n^s|sin(n)| = \frac{|sin(n)|}{n^{-s}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Tout ceci assure l'existence de la borne inférieure de E d'où
<u>corollaire :</u> $\qquad 0 \leqslant inf\{s \in \mathbb{R} / \lim\limits_{n \to +\infty} n^s|sin(n)| = +\infty\} \leqslant 20$
Bien sûr on donnerait cher pour connaître cette borne inférieure ! !
<u>Théorème2</u>
$ln|sin(n)| = O(ln(n))$ $\quad$ quand n tend vers $+\infty$

Posons pour tout entier $n \geqslant 2$ $\quad \alpha_n = \frac{|ln|sin(n)||}{ln(n)} (\geqslant 0)$ $\quad$ alors le théorème 2 est équivalent à $\alpha_n = O(1)$ $\quad$ c'est à dire que la suite (α_n) $\quad$ est bornée.

Raisonnons par l'absurde. La suite (α_n) étant minorée par 0, si elle n'était pas bornée, elle ne serait pas majorée donc il existerait une suite $(\alpha_{\varphi(n)})$ extraite de la suite (α_n) qui tendrait vers $+\infty$ où φ désignerait une application strictement croissante de l'ensemble des entiers $\geqslant 2$ dans lui-même.
Dès lors pour tout réel fixé $s > 20$ on aurait à partir d'un certain rang $\alpha_{\varphi(n)} \geqslant s$ autrement dit $|ln|sin(\varphi(n))|| \geqslant s.ln(\varphi(n))$ soit encore $-ln|sin(\varphi(n))| \geqslant s.ln(\varphi(n))$ vu que $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $|sin(m)| \in]0 \quad 1[$ et donc $ln|sin(m)| < 0$ puis $|ln|sin(m)|| = -ln|sin(m)|$.
Par conséquent on obtiendrait : $0 \geqslant s.ln(\varphi(n)) + ln|sin(\varphi(n))|$
ou encore $0 \geqslant ln\{\varphi(n)^s |sin(\varphi(n))|\}$ et finalement $\varphi(n)^s |sin(\varphi(n))| \leqslant 1$
ce qui contredirait le théorème 1 car tout suite extraite d'une suite qui tend vers $+\infty$ tend aussi vers $+\infty$. Conclusion : la suite (α_n) est bornée.

<u>Théorème3</u>

$\forall s > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} |sin(n)|^{\frac{1}{n^s}} = 1$ ou encore $\lim_{n \to +\infty} ln\{|sin(n)|^{\frac{1}{n^s}}\} = 0$

En effet : $ln\{|sin(n)|^{\frac{1}{n^s}}\} = \frac{1}{n^s} ln|sin(n)| = \frac{ln|sin(n)|}{ln(n)}.\frac{ln(n)}{n^s} = O(1).o(1) = o(1)$

car $\frac{ln|sin(n)|}{ln(n)} = O(1)$ d'après le théorème 2 et $\frac{ln(n)}{n^s} = o(1)$.

Les théorèmes 1,2 et 3 sont encore vrais en remplaçant sin(n) par cos(n), tan(n) ou cotan(n)

Ceci étant facile à prouver avec l'égalité bien connue sin(2n)= 2sin(n)cos(n) où figurent 2 fois sinus et une fois cosinus ce qui peut laisser espérer qu'un résultat sur le sinus puisse se transmettre au cosinus puis à la tangente et à la cotangente.

Preuves rapides de ces résultats :

Dans ce qui suit $a_n \longrightarrow l$ voudra dire que la suite (a_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$.

<u>Extensions du théorème 1</u> (ici on suppose $s > 20$)
$|sin(2n)| = 2|sin(n)||cos(n)|$ d'où en multipliant par $(2n)^s$
$(2n)^s|sin(2n)| = (2n)^s 2|sin(n)||cos(n)| = 2^{s+1}|sin(n)|n^s|cos(n)|$ ce qui donne
$n^s|cos(n)| = \frac{(2n)^s|sin(2n)|}{2^{s+1}|sin(n)|} = \frac{1}{|sin(n)|}\frac{1}{2^{s+1}}(2n)^s|sin(2n)|$ or $|sin(n)| \in]0 \quad 1[$
donc $\frac{1}{|sin(n)|} > 1$ et par conséquent $n^s|cos(n)| > \frac{1}{2^{s+1}}(2n)^s|sin(2n)| \longrightarrow +\infty$
vu que $n^s|sin(n)| \longrightarrow +\infty$ (théorème 1) et que la suite extraite $(2n)^s|sin(2n)|$ d'une suite tendant vers $+\infty$ <u>tend aussi vers $+\infty$</u> d'où

$$\boxed{\forall s > 20 \quad n^s|cos(n)| \longrightarrow +\infty}$$

$n^s|tan(n)| = n^s|sin(n)|\frac{1}{|cos(n)|} > n^s|sin(n)|$ car $\frac{1}{|cos(n)|} > 1$
or $n^s|sin(n)| \longrightarrow +\infty$ d'où

$$\boxed{\forall s > 20 \quad n^s|tan(n)| \longrightarrow +\infty}$$

$n^s|cotan(n)| = n^s|cos(n)|\frac{1}{|sin(n)|} > n^s|cos(n)|$ car $\frac{1}{|sin(n)|} > 1$ d'où

$$\boxed{\forall s > 20 \quad n^s|cotan(n)| \longrightarrow +\infty}$$

Bien sûr on peut généraliser et actualiser le théorème 1 et ses extensions, ainsi que son corollaire, en remplaçant 20 par 7,0161 grâce à la

version de M.Hata du théorème de Mahler.

Extensions du théorème 2 (ici on suppose $n > 1$ afin que $ln(n) \neq 0$)

$|sin(2n)| = 2|sin(n)||cos(n)| \Longrightarrow ln|sin(2n)| = ln(2)+ln|sin(n)|+ln|cos(n)| \Longrightarrow$ $\frac{ln|cos(n)|}{ln(n)} = \frac{ln|sin(2n)|}{ln(n)} - \frac{ln|sin(n)|}{ln(n)} - \frac{ln(2)}{ln(n)} = O(1)$ en tant que somme de 3 suites bornées.

La $2^{ième}$suite est bornée d'après le théorème 2 et la $3^{ième}$suite est bornée car convergente vers 0.

La $1^{ière}$suite est bornée car $\frac{|ln|sin(2n)||}{ln(n)} = \frac{|ln|sin(2n)||}{ln(2n)}\frac{ln(2n)}{ln(n)} = \frac{|ln|sin(2n)||}{ln(2n)}(\frac{ln(2)}{ln(n)} + 1) \leqslant 2\frac{|ln|sin(2n)||}{ln(2n)}$

cette dernière suite étant bornée en tant que suite extraite d'une suite bornée d'où

$$\boxed{ln|cos(n)| = O(ln(n))}$$

$\frac{ln|tan(n)|}{ln(n)} = \frac{ln|sin(n)|}{ln(n)} - \frac{ln|cos(n)|}{ln(n)} = O(1)$ en tant que somme de 2 suites bornées d'où

$$\boxed{ln|tan(n)| = O(ln(n))}$$

Pour les mêmes raisons on a :

$$\boxed{ln|cotan(n)| = O(ln(n))}$$

Extensions du théorème 3 (ici on suppose $s > 0$)

$ln\{|cos(n)|^{\frac{1}{n^s}}\} = \frac{ln|cos(n)|}{n^s} = \frac{ln|cos(n)|}{ln(n)}\frac{ln(n)}{n^s} = O(1).o(1) = o(1)$ ce qui revient à

$$\boxed{\forall s > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} |cos(n)|^{\frac{1}{n^s}} = 1}$$

$|tan(n)|^{\frac{1}{n^s}} = \frac{|sin(n)|^{\frac{1}{n^s}}}{|cos(n)|^{\frac{1}{n^s}}} \longrightarrow 1$ car le numérateur et le dénominateur tendent vers 1 d'où

$$\boxed{\forall s > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} |tan(n)|^{\frac{1}{n^s}} = 1}$$

Pour les mêmes raisons on a :

$$\boxed{\forall s > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} |cotan(n)|^{\frac{1}{n^s}} = 1}$$

En particulier pour s=1 on a $|sin(n)|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1\,;|cos(n)|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1\,;|tan(n)|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$
$|cotan(n)|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$

Applications

Tous ces résultats ont de nombreuses applications dans le domaine des suites et des séries numériques ou entières. En voici quelques unes avec indications pour les plus simples et preuves fournies à la fin sur des feuilles complémentaires pour les autres.

$\boxed{1.}$ Les rayons de convergence des séries entières de termes généraux : $\frac{1}{sin(n)}x^n$; $\frac{1}{cos(n)}x^n$; $tan(n)x^n$; $cotan(n)x^n$ sont égaux à 1 (règle d'Hadamard).

La série entière de terme général $\frac{1}{n!sin(n)}x^n$ a un rayon de convergence infini.

En effet il est facile de prouver que $ln(n!) \sim nln(n)$ par une méthode classique d'encadrement de $ln(k)$, pour $k = 2$ à n, par 2 intégrales de la fonction $ln(x)$. Dès lors $(n!)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow +\infty$ car $ln\{(n!)^{\frac{1}{n}}\} = \frac{1}{n}ln(n!) \sim \frac{1}{n}nln(n) = ln(n) \longrightarrow +\infty$ et comme de plus $|sin(n)|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ (théorème 3) on en déduit que $|\frac{1}{n!sin(n)}|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{|sin(n)|^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 0$ puis le résultat annoncé grâce à la règle d'Hadamard.

$\boxed{2.}$ La suite $(2^n|sin(n)|)$ ou, plus généralement pour $a > 1$, la suite $(a^n|sin(n)|) \longrightarrow +\infty$ car à partir d'un certain rang on a : $a^n > n^{21}$ donc $a^n|sin(n)| > n^{21}|sin(n)|$.
(croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles)

$\boxed{3.}$ Pour tout $s > 0$ la suite $(|sin(n)|^{\frac{1}{n^s}})$ admet un développement asymptotique à tout ordre convergent dans l'échelle des $(\frac{ln|sin(n)|}{n^s})^k$ pour k entier. En particulier $|sin(n)|^{\frac{1}{n^s}} \sim 1 + \frac{ln|sin(n)|}{n^s}$. Utiliser $|sin(n)|^{\frac{1}{n^s}} = e^{\frac{ln|sin(n)|}{n^s}}$ puis la série entière qui définit la fonction exponentielle.

$\boxed{4.}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ln|sin(n)|}{n^s}$ converge si et seulement si $s > 1$.
Si $s > 1$ alors la série converge absolument car $|\frac{ln|sin(n)|}{n^s}| = |\frac{ln|sin(n)|}{ln(n)}|\frac{ln(n)}{n^s}$ est le produit de 2 suites dont la première est bornée (théorème 2) et la seconde est le terme général d'une série absolument convergente.
Si s$\leqslant 1$ alors la série diverge et vaut $-\infty$[1].

$\boxed{5.}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(x^2 - 2xcos(2k) + 1)}{4k^2 - 1}$ converge normalement sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.[1]

$\boxed{6.}$ La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|sin(n)|}{n}$ est convergente.

On part de l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|sin(n)|}{n} x^n = -\frac{2}{\pi}ln(1-x) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(x^2 - 2xcos(2k) + 1)}{4k^2 - 1}$ [4] pour $x \in]-1, 1[$ que l'on obtient en remplaçant, dans la première série, $|sin(n)|$ par le développement en série de Fourier de $|sin(x)|$ avec n à la place de x ce qui donne une série double où on peut intervertir les limites. La deuxième série converge normalement sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ ($voir$ $\boxed{5.}$) il y a donc convergence uniforme sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ ce qui assure la continuité de sa somme $S(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $x = -1$. De plus la fonction $x \mapsto -\frac{2}{\pi}ln(1-x)$ est continue en $x = -1$ d'où la somme de la première série qui est entière admet une limite finie $L = -\frac{2}{\pi}ln(2) + S(-1)$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures et comme $\frac{|sin(n)|}{n} = O(\frac{1}{n})$ on peut appliquer le théorème de Littlewood[5] et conclure que pour x=-1 la série entière converge vers L ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|sin(n)|}{n} = -\frac{2}{\pi}ln(2) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(2 + 2cos(2k))}{4k^2 - 1}$$

or $cos(2k) = 2cos^2(k) - 1$ d'où

[1] Preuve fournie à la fin de cet article,sur des feuilles complémentaires.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{|sin(n)|}{n} = -\frac{2}{\pi}ln(2) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ln(4cos^2(k))}{4k^2-1} =$$

$$-\frac{2}{\pi}ln(2) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ln(4)}{4k^2-1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ln(cos^2(k))}{4k^2-1} =$$

$$-\frac{2}{\pi}ln(2) + \frac{4}{\pi}ln(2)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ln|cos(k)|}{4k^2-1} \quad \text{or} \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{|sin(n)|}{n} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ln|cos(k)|}{4k^2-1} = -0,4050635483...$$

Le calcul numérique ayant été réalisé avec la deuxième série qui converge plus vite que la première.

$\boxed{7.}$ La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(|sin(n)|-\lambda)$ est convergente si et seulement si $\lambda = \frac{2}{\pi}$ et elle vaut $+\infty$ si $\lambda < \frac{2}{\pi}$ ou $-\infty$ si $\lambda > \frac{2}{\pi}$. La convergence est donc très instable au voisinage de $\lambda = \frac{2}{\pi}$.[2]

$\boxed{8.}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{|sin(k)|}{k} = \frac{2}{\pi}ln(n) + \frac{2}{\pi}\gamma + l + o(1)$ (Développement asymptotique à 2 termes de$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{|sin(k)|}{k})^2$.

En particulier$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{|sin(k)|}{k} \sim \frac{2}{\pi}ln(n)$. La lettre γ désignant la constante d'Euler 0,57721566... et $l = 0,243340361... = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(|sin(n)| - \frac{2}{\pi})$.

Références

[1] M.MIGNOTTE, Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres. In : Bulletin de la Société Mathématique de France, mémoire n^o 37, 1974, pages 121 à 132.

[2] A.BOUVIER et M.GEORGE, sous la direction de F. LE LIONNAIS, Dictionnaire des Mathématiques, PUF, 1996, page 522.

[3] M.HATA, A lower bound for rational approximations to π, Acta Arithmetica 63 4 (1993).

[4] Revues de mathématiques speciales numéro 8 (Avril 1981) VUIBERT, pages 344 à 351.

[5] ZYGMUND, Trigonometric Series, second edition page 81, Cambridge university press.

[2]Preuve fournie à la fin de cet article, sur des feuilles complémentaires.

Feuilles complémentaires où se trouvent les preuves manquantes de l'article

$\boxed{4.}$ *Une série divergente.*

Montrons que pour $s = 1$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ln|sin(n)|}{n^s}$ vaut $-\infty$ et à fortiori elle vaudra $-\infty$ si $s < 1$ car $s < 1$ et $n \geqslant 1 \Longrightarrow n^s \leqslant n \Longrightarrow \frac{1}{n^s} \geqslant \frac{1}{n} \Longrightarrow \frac{1}{n^s} ln|sin(n)| \leqslant \frac{1}{n} ln|sin(n)|$ vu que $ln|sin(n)| < 0$.

Supposons donc $s = 1$. On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{ln|sin(k)|}{k} = \sum_{k=1}^{n} ln\{|sin(k)|^{\frac{1}{k}}\} = ln(p_n)$ où $p_n = \prod_{k=1}^{n} |sin(k)|^{\frac{1}{k}}$. Il est clair que $p_n > 0$ pour tout $n > 0$ d'où $\frac{p_{n+1}}{p_n} = |sin(n+1)|^{\frac{1}{n+1}} = e^{\frac{ln|sin(n+1)|}{n+1}} < 1$ car $ln|sin(n+1)| < 0$.

Par conséquent la suite (p_n) est décroissante, minorée par 0 donc convergente vers un nombre l et à fortiori la suite extraite (p_{2n}) convergera aussi vers l. Groupons les facteurs par 2 dans p_{2n}.

$p_{2n} = \prod_{k=1}^{2n} |sin(k)|^{\frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^{n} (|sin(2k-1)|^{\frac{1}{2k-1}} |sin(2k)|^{\frac{1}{2k}})$. On remarque alors que $\frac{ln|sin(2k-1)|}{2k-1} + \frac{ln|sin(2k)|}{2k} \leqslant \frac{ln|sin(2k-1)|}{2k} + \frac{ln|sin(2k)|}{2k}$

(car $\frac{1}{2k-1} \geqslant \frac{1}{2k}$ et $ln|sin(2k-1)| < 0$ d'où $\frac{ln|sin(2k-1)|}{2k-1} \leqslant \frac{ln|sin(2k-1)|}{2k}$) on peut donc encore écrire

$ln\{|sin(2k-1)|^{\frac{1}{2k-1}} |sin(2k)|^{\frac{1}{2k}}\} \leqslant ln\{|sin(2k-1)|^{\frac{1}{2k}} |sin(2k)|^{\frac{1}{2k}}\}$ puis en passant aux exponentielles $|sin(2k-1)|^{\frac{1}{2k-1}} |sin(2k)|^{\frac{1}{2k}} \leqslant |sin(2k-1)sin(2k)|^{\frac{1}{2k}}$ et $p_{2n} = \prod_{k=1}^{2n} |sin(k)|^{\frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^{n} (|sin(2k-1)|^{\frac{1}{2k-1}} |sin(2k)|^{\frac{1}{2k}}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} |sin(2k-1)sin(2k)|^{\frac{1}{2k}}$.

Or la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = |sin(x)sin(x+1)|$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un maximum M sur le compact $[0, \pi]$ en x_0 et M est aussi le maximum de f sur $\mathbb{R}$ vu que f est de période π. On a $M = |sin(x_0)sin(x_0+1)| \leqslant 1$. Montrons par l'absurde qu'en fait $M < 1$. Sinon on aurait $M = |sin(x_0)sin(x_0+1)| = 1$ ce qui entraînerait $|sin(x_0)| = 1$ et $|sin(x_0+1)| = 1$ soit $cos(x_0) = 0$ et $cos(x_0+1) = 0$ d'où

$cos(x_0)cos(1) - sin(x_0)sin(1) = 0 \Longrightarrow -sin(x_0)sin(1) = 0 \Longrightarrow$

$|sin(x_0)||sin(1)| = 0 \Longrightarrow |sin(1)| = 0$ et la contradiction vu que $sin(1) = 0,8...$

Finalement on a bien $M < 1$ d'où en revenant à p_{2n}

$p_{2n} = \prod_{k=1}^{2n} |sin(k)|^{\frac{1}{k}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (|sin(2k-1)sin(2k)|^{\frac{1}{2k}}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} M^{\frac{1}{2k}} = M^{\frac{1}{2}S_n}$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ et comme $0 < M < 1$ on en déduit que p_{2n} tend vers 0 donc $l = 0$ et par conséquent p_n tend vers 0 et $\sum_{k=1}^{n} \frac{ln|sin(k)|}{k} = ln(p_n)$ tendra vers $-\infty$. CQFD.

$\boxed{5.}$ *Une série utile pour l'exercice* $\boxed{6}$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(x^2-2xcos(2k)+1)}{4k^2-1}$ converge normalement sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Montrons d'abord que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)\,(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f_k(x) = x^2 - 2xcos(2k) + 1 > 0$.

f_k est un trinôme du second degré ayant pour dérivée $f_k'(x) = 2x - 2cos(2k)$. Il y a donc un minimum pour $x = cos(2k)$ égal à $f_k(cos(2k)) = cos^2(2k) - 2cos^2(2k) + 1 = 1 - cos^2(2k) = sin^2(2k) > 0$ d'où le résultat annoncé, ce qui justifie l'existence de $ln(x^2 - 2xcos(2k) + 1)$ pour tout entier $k > 0$ et tout réel x. Posons pour tout réel x et tout entier $k > 0$ $h_k(x) = ln(f_k(x)) =$

$ln(x^2-2xcos(2k)+1)$. Dérivons. $h_k^{'}(x)=\frac{2x-2cos(2k)}{x^2-2xcos(2k)+1}$. Il est clair que $h_k^{'}(x)$ est du signe de $x-cos(2k)$ d'où h_k est décroissante sur $]-\infty,cos(2k)]$ et croissante sur $[cos(2k),+\infty[$ avec un minimum en $x=cos(2k)$ qui est égal à $h_k(cos(2k))=ln(cos^2(2k)-2cos^2(2k)+1)=2ln|sin(2k)|<0$.
On a donc $(\forall k\in\mathbb{N}^*)\ (\forall x\in\mathbb{R})\quad 2ln|sin(2k)|\leqslant h_k(x)$
Pour ce qui suit on choisit 2 réels a,b tels que $a<-2<2<b$. Il est clair que pour tout entier $k>0$ on aura $a<-2<cos(2k)<2<b$ et que h_k est décroissante sur $[a,cos(2k)]$ et croissante sur $[cos(2k),b]$ d'où $\forall x\in[a,b]$ on a l'alternative :
Soit $x\in[a,cos(2k)]\Longrightarrow a\leqslant x\Longrightarrow h_k(a)\geqslant h_k(x)\Longrightarrow h_k(x)\leqslant h_k(a)\leqslant |h_k(a)|\leqslant |h_k(a)|+|h_k(b)|$
Soit $x\in]cos(2k),b]\Longrightarrow x\leqslant b\Longrightarrow h_k(x)\leqslant h_k(b)\Longrightarrow h_k(x)\leqslant h_k(b)\leqslant |h_k(b)|\leqslant |h_k(a)|+|h_k(b)|$
D'où $\forall x\in[a,b]\quad 2ln|sin(2k)|\leqslant h_k(x)\leqslant |h_k(a)|+|h_k(b)|$ et en vertu de l'implication $\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta\Longrightarrow|\gamma|\leqslant Max(|\alpha|,|\beta|)$ on a pour tout x dans $[a,b]$
$|h_k(x)|\leqslant Max\{2|ln|sin(2k)||,|h_k(a)|+|h_k(b)|\}\leqslant 2|ln|sin(2k)||+|h_k(a)|+|h_k(b)|$ soit
$\forall x\in[a,b]\qquad |h_k(x)|\leqslant 2|ln|sin(2k)||+|h_k(a)|+|h_k(b)|\quad (\spadesuit)$
Montrons que $\forall k>0\quad |h_k(a)|\leqslant 2ln(1-a)$. D'abord un résultat utile souligné : $a<-2\Longrightarrow a+1<-1$ d'où $\underline{(a+1)^2>1}$.
On a : $\qquad -1\leqslant cos(2k)\leqslant 1$ puis en multipliant par $-2a(>0)$
$\qquad 2a\leqslant -2acos(2k)\leqslant -2a$ d'où en additionnant $1+a^2$
$1<(1+a)^2\leqslant a^2-2acos(2k)+1\leqslant(1-a)^2$ et enfin en passant aux logarithmes
$0<ln(a^2-2acos(2k)+1)\leqslant 2ln(1-a)$ car $1-a>0$ d'où
$|h_k(a)|=|ln(a^2-2acos(2k)+1)|=ln(a^2-2acos(2k)+1)\leqslant 2ln(1-a)$ et le résultat annoncé

$$\boxed{\forall k>0\qquad |h_k(a)|\leqslant 2ln(1-a)}$$

Montrons que $\forall k>0\quad |h_k(b)|\leqslant 2ln(1+b)$. D'abord un résultat utile souligné : $2<b\Longrightarrow\quad 1<b-1\quad\Longrightarrow \underline{1<(b-1)^2}$.
On a : $\qquad -1\leqslant -cos(2k)\leqslant 1$ puis en multipliant par $2b(>0)$
$\qquad -2b\leqslant -2bcos(2k)\leqslant 2b$ d'où en additionnant $1+b^2$
$1<(b-1)^2\leqslant b^2-2bcos(2k)+1\leqslant(1+b)^2$ et enfin en passant aux logarithmes
$0<ln(b^2-2bcos(2k)+1)\leqslant 2ln(1+b)$ car $1+b>0$ d'où
$|h_k(b)|=|ln(b^2-2bcos(2k)+1)|=ln(b^2-2bcos(2k)+1)\leqslant 2ln(1+b)$ et le résultat annoncé

$$\boxed{\forall k>0\qquad |h_k(b)|\leqslant 2ln(1+b)}$$

Finalement avec $(\spadesuit)$ et les 2 inégalités encadrées on obtient :
$\forall x\in[a,b]\qquad |h_k(x)|\leqslant 2|ln|sin(2k)||+2ln(1-a)+2ln(1+b)$ et vu que $4k^2-1>k^2$ si $k>0$ on a :
$\frac{|h_k(x)|}{4k^2-1}\leqslant\frac{2|ln|sin(2k)||}{4k^2-1}+\frac{2ln(1-a)}{4k^2-1}+\frac{2ln(1+b)}{4k^2-1}\leqslant\frac{2|ln|sin(2k)||}{k^2}+\frac{2ln(1-a)}{k^2}+\frac{2ln(1+b)}{k^2}$ soit

$$\frac{|ln(x^2-2xcos(2k)+1)|}{4k^2-1}\leqslant\frac{2|ln|sin(2k)||}{k^2}+\frac{2ln(1-a)}{k^2}+\frac{2ln(1+b)}{k^2}$$

Chacun des 3 derniers nombres est le terme général d'une série numérique convergente. C'est évident pour les 2 derniers qui sont les termes généraux de séries de Riemann. Reste le cas du premier.
On a $|sin(2k)|=2|sin(k)||cos(k)|$ d'où $ln|sin(2k)|=ln2+ln|sin(k)|+ln|cos(k)|$ et

puis $\frac{|ln|sin(2k)||}{k^2} \leqslant \frac{ln(2)}{k^2} + \frac{|ln|sin(k)||}{k^2} + \frac{|ln|cos(k)||}{k^2}$. Or $|ln|sin(k)|| = O(ln(k))$ d'après le théorème 2, d'où $\frac{|ln|sin(k)||}{k^2} = O(\frac{ln(k)}{k^2})$ qui est le terme général d'une série convergente et il en est de même avec $cos(k)$ à la place de $sin(k)$ d'où $\frac{|ln|sin(2k)||}{k^2}$ est le terme général d'une série convergente, ce qui achève de montrer que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(x^2-2xcos(2k)+1)}{4k^2-1}$ est normalement convergente sur tout intervalle $[a,b]$ qui contient -2 et 2 et donc sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

$\boxed{7.}$ *Une sommation miraculeuse !*

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(|sin(n)| - \lambda)$ est convergente si et seulement si $\lambda = \frac{2}{\pi}$.

On part de l'égalité déjà citée dans $\boxed{6.}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|sin(n)|}{n} x^n = -\frac{2}{\pi} ln(1-x) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(x^2-2xcos(2k)+1)}{4k^2-1}$ pour tout x $\in]-1,1[$, ce qui donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|sin(n)|}{n} x^n + \frac{2}{\pi} ln(1-x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(x^2-2xcos(2k)+1)}{4k^2-1}$ ou encore $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|sin(n)|}{n} x^n - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(x^2-2xcos(2k)+1)}{4k^2-1}$ soit

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(|sin(n)| - \frac{2}{\pi}) x^n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(x^2-2xcos(2k)+1)}{4k^2-1}$. Ces 2 dernières séries ont des sommes égales et la deuxième série converge normalement donc uniformément sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}(voir \boxed{5.})$; sa somme est donc continue sur $\mathbb{R}$ et admet ainsi une limite finie l quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. il en est donc de même pour la somme de la première série qui est entière, elle admet pour limite l en 1^- et comme $\frac{1}{n}(|sin(n)| - \frac{2}{\pi}) = O(\frac{1}{n})$ on peut conclure en vertu du théorème de Littlewood que pour $x = 1$ la série entière converge vers l. Ce qui donne :

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(|sin(n)| - \frac{2}{\pi}) = l = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ln(4sin^2 k)}{4k^2-1} = 0,243340361\ldots$ A partir de là, si l'on pose $\lambda = \frac{2}{\pi} - \alpha$ on aura $\frac{1}{n}(|sin(n)| - \lambda) = \frac{1}{n}(|sin(n)| - \frac{2}{\pi} + \alpha) = \frac{1}{n}(|sin(n)| - \frac{2}{\pi}) + \frac{\alpha}{n}$ la série initiale converge donc si et seulement si $\alpha = 0$ i.e. $\lambda = \frac{2}{\pi}$ compte tenu de la divergence de la série harmonique pour $\alpha \neq 0$ et de la convergence de la série de terme général : $\frac{1}{n}(|sin(n)| - \frac{2}{\pi})$. On peut même preciser que pour $\lambda < \frac{2}{\pi}(\alpha > 0)$ la série vaut $+\infty$ et pour $\lambda > \frac{2}{\pi}(\alpha < 0)$ la série vaut $-\infty$. D'où, si λ s'écarte un tant soit peu de $\frac{2}{\pi}$, alors la sommation bascule vers l'un des infinis.

$\boxed{8.}$ *Développement asymptotique à 2 termes de* $\sum_{k=1}^{n} \frac{|sin(k)|}{k}$ *quand* $n \to +\infty$.

$\sum_{k=1}^{n} \frac{|sin(k)|}{k} = \frac{2}{\pi} ln(n) + \frac{2}{\pi}\gamma + l + o(1)$ quand $n \to +\infty$.

Posons pour tout entier $n > 0$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{|sin(k)|}{k}$, $\sigma_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = S_n - \sigma_n$. On a alors $u_n = S_n - \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(|sin(k)| - \frac{2}{\pi}) \longrightarrow l = 0.243340361\ldots$ (voir $\boxed{7.}$) autrement dit $u_n = l + o(1)$.

Il est connu que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ln(n) + \gamma + o(1)$ c'est la définition de la constante d'Euler γ, d'où $S_n = \sigma_n + u_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + u_n = \frac{2}{\pi}\{ln(n) + \gamma + o(1)\} + l + o(1)$ soit le résultat annoncé : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{|sin(k)|}{k} = \frac{2}{\pi} ln(n) + \frac{2}{\pi}\gamma + l + o(1)$.

Il est clair que $\frac{2}{\pi}\gamma + l + o(1) = o(ln(n))$ et donc que $\sum_{k=1}^{n} \frac{|sin(k)|}{k} \sim \frac{2}{\pi} ln(n)$.

Pour tout contact $\rightsquigarrow$ guyphilippe2@aol.com